Analysis

Ableitungsfunktionen

Ableitungsberechnung mit der Grenzwertmethode

Besonders wichtig ist der Zentraltext
über Ableitungen 41100

Datei 41101

Stand 30. Dezember 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Problem einer jeden Bibliothek ist sehr oft das Suchen und Finden eines geeigneten Textes.
Da es sehr viele Texte zu Ableitungen gibt, die zudem noch über diverse Funktionenbereiche verteilt sind, habe ich diesen „Zentraltext für Ableitungen“ angefertigt.
Er bringt eine ziemlich tief gehende Übersicht über Ableitungen von allerlei Funktionen.
Und zu jedem Thema findet man Verweise auf andere Texte, die noch mehr Übungen bereitstellen.
Außerdem folgt jetzt gleich eine Übersichtsliste aller Funktionen, in denen es um das „handwerkliche“ Ableiten geht, also nicht um deren Anwendungen.

41100	Zentraltext für Ableitungen
41101	Ableitungen mit der Grenzwertmethode berechnen. Beweis einiger Ableitungsregeln mit der Grenzwertmethode. (Dieser Text)
41102	Hier werden nur mit der Potenzregel, der Regel für konstante Faktoren und der Summenregel ganzrationale Funktionen abgeleitet, dann gebrochen-rationale Funktionen, die man in die Potenzschreibweise setzen kann, und ebenso einfache Wurzelfunktionen. Kettenregel, Produktregel und Quotientenregel werden nicht verwendet,
41103	Kettenregel mit Anwendungen auf viele Funktionsarten
41105	Implizite Ableitungen (Teil 1 auf (höherem) Schulniveau)
41113	Ableitungen zusammengesetzter Funktionen, Differenzierbarkeit.
41130	50 Ableitungsbeispiele (Arbeit eines Schülers)
43015	Ableitung gebrochen rationaler Funktionen – Quotientenregel
43016	Übungsaufgaben aus 43015
44012	Ableitung von Wurzelfunktionen, auch komplizierte Funktionen.
45015	Ableitung von Exponentialfunktionen.
45021	Ableitung von Exponentialfunktionen mit vollständiger Induktion
46012	Ableitung von Logarithmusfunktionen
47015	Ableitung von trigonometrischen Funktionen
51020	Implizite Ableitungen (Teil 2 für Studenten) Februar 2011.

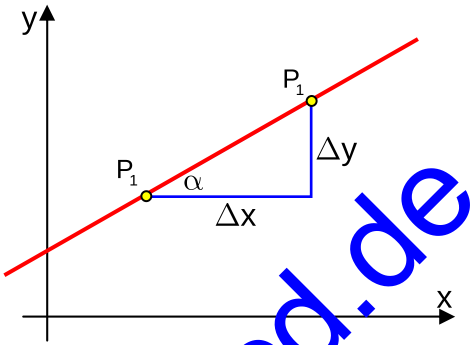
Inhalt

1 Problem: Tangentensteigung

Eine Gerade, die nicht parallel zur y-Achse ist, hat eine Gleichung der Form: $\boxed{y = m \cdot x + n}$

Kennt man von einer Geraden zwei Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$, dann kann man daraus ihre Steigung m berechnen:

$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



Beispiel:

Die Gerade durch $P_1(1 \mid 3)$ und $P_2(3 \mid 4)$ hat dann die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-3}{3-1} = \frac{1}{2}$.

Ihre Gleichung kann man dann entweder so bekommen: $y = \frac{1}{2}x + n$

$P_1(1 \mid 3)$ einsetzen: $\boxed{3} = \frac{1}{2} \cdot \boxed{1} + n$

ergibt: $n = \frac{5}{2}$

Ergebnis: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

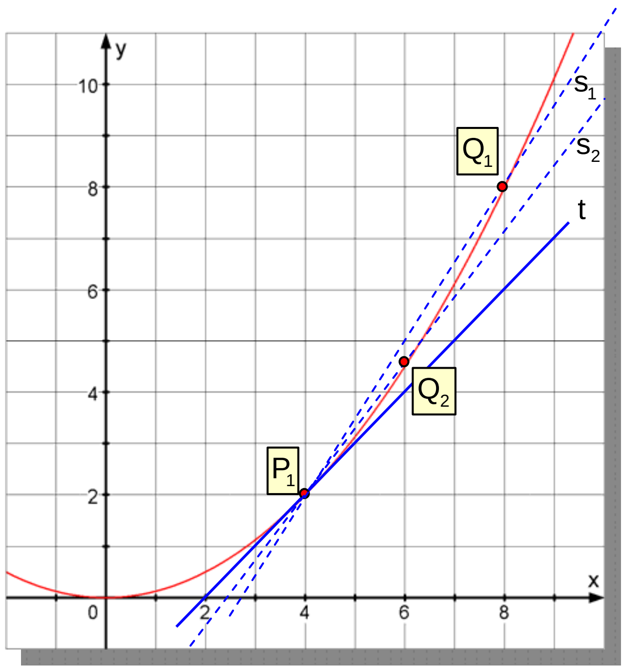
oder durch Einsetzen in die Punkt-Steigungsform: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$P_1(1 \mid 3)$ einsetzen: $y - \boxed{3} = \boxed{\tfrac{1}{2}} \cdot (\boxed{1} - x_1)$

Ergebnis: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Die Aufgabe, die **Gleichung einer Tangente** in einem Punkt an eine Parabel aufzustellen, lässt sich auf diese Weise noch nicht lösen, denn wir kennen allenfalls die Koordinaten des Berührpunktes, aber uns ist weder ein zweiter Punkt noch die Steigung der Tangente bekannt. Daher musste man eine neue Methode entwickeln, wie man die Steigung der Tangente berechnen kann.

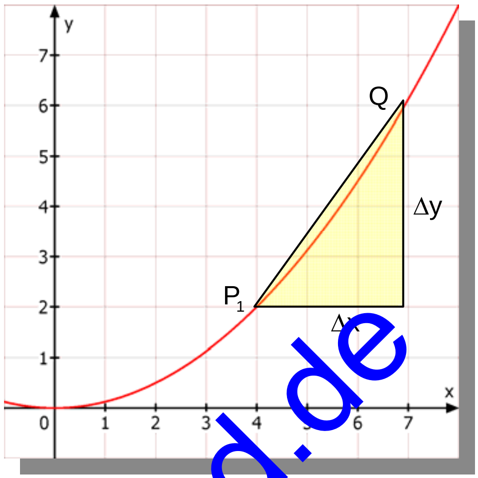
Nebenstehende Abbildung macht anschaulich, wie wir das Problem lösen werden.
Um die Tangente t an die Parabel $y = \frac{1}{8}x^2$ im Kurvenpunkt $P_1(x_1 \mid y_1)$ mit $y_1 = \frac{1}{8}x_1^2$ zu bestimmen, wählt man zunächst einen zweiten, benachbarten Kurvenpunkt Q_1 aus. Die Gerade (P_1Q_1) ist dann zwar keine Tangente (sondern eine Sekante), aber doch eine Gerade mit ähnlicher Lage wie die Tangente.
Je näher Q_1 bei P_1 liegt, desto näher kommt auch die Sekante der Tangente. Beispielsweise erhält man mit Q_2 (siehe Abb.) schon eine Sekante, die näher an der Tangente liegt als s_1. Bewegt sich dieser Nachbarpunkt Q_2 auf P_1 zu, wird gedanklich aus der Sekante die Tangente.



Und mit diesem Trick kann man tatsächlich die Tangentensteigung berechnen.

2 Grenzwertmethode für die Tangentensteigung

2.1 Am Beispiel der Funktion $\boxed{f(x)=\frac{1}{8}x^2}$



Gesucht ist die Steigung der Tangente im Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$.

Weil P_1 auf der Parabel $y=\frac{1}{8}x^2$ liegt, ist $y_1=\frac{1}{8}x_1^{\,2}$,
also ist der gegebene Berührpunkt: $P_1\left(x_1 \mid \frac{1}{8}x_1^{\,2}\right)$

Von x_1 geht man um eine Strecke $h \neq 0$ zur Seite und kommt zum „Nachbarpunkt" $Q\left(x_1+h \mid \frac{1}{8}(x_1+h)^2\right)$

Dieser liegt um die Strecke h rechts von P_1, wenn $h>0$ ist, um h links von P_1, wenn h negativ ist. Jedenfalls muss $h \neq 0$ sein, weil ja P_1 und Q sonst derselbe Punkt sind, und dann gibt es keine Sekante!

Berechnung der Sekantensteigung:

$$m_s(h)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{8}(x_1+h)^2-\frac{1}{8}x_1^{\,2}}{h}=\frac{\frac{1}{8}\left(x_1^{\,2}+2x_1h+h^2\right)-\frac{1}{8}x_1^{\,2}}{h}=\frac{\frac{1}{4}x_1h+\frac{1}{8}h^2}{h}$$

Die Schreibweise $m_s(h)$ für die Sekantensteigung, zeigt, dass diese von h abhängt, denn h bestimmt die Lage des Nachbarpunktes. Zu jedem Wert von h (außer 0) gibt es eine Sekantensteigung. Diese Zuordnung ist eindeutig, also eine Funktion, sie heißt **<u>Sekantensteigungs-funktion</u>** und hat den Definitionsbereich $D_s=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Umformung der Sekantensteigung:

Man kann im Zähler h ausklammern und dann h herauskürzen:

$$m_s(h)=\frac{\cancel{h}\left(\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{8}h\right)}{\cancel{h}}=\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{8}h.$$

Da nach dem Kürzen h aus dem Nenner verschwunden ist, kann man nunmehr den Grenzwert für $h\to 0$ berechnen. Die gekürzte Sekantensteigungsfunktion ist mit der Variablen h ganzrational und daher überall stetig, also darf man in der gekürzten, nunmehr auch bei h stetigen Funktion den Grenzwert durch Einsetzen berechnen und erhält:

$$\lim_{h\to 0} m_s(h)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{8}h\right)=\frac{1}{4}x_1$$

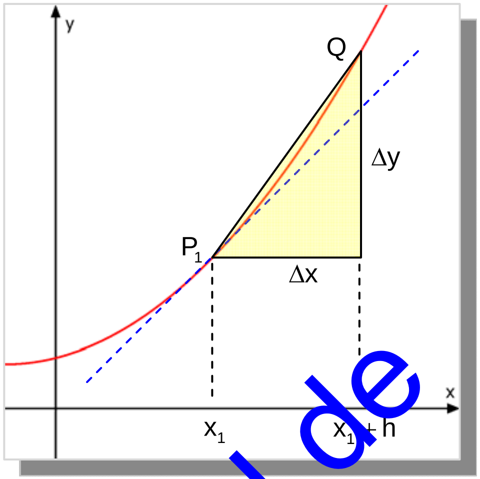
Der berechnete Grenzwert ist nun die Tangentensteigung: $\boxed{m_T=\lim_{h\to 0} m_s(h)=\frac{1}{4}x_1}$

Bei $x_1=4$, also im Kurvenpunkt $P_1(4 \mid 2)$ (siehe Abbildung!) ist also die Tangentensteigung

$m_T=\frac{1}{4}\cdot 4=1$, und die Tangente erhält diese Gleichung (Punkt-Steigungs-Form):

$$y-2=1\cdot(x-4) \quad\Rightarrow\quad y=x-2.$$

2.2 Anwendung auf beliebige Funktionen



Gegeben ist eine Funktion f, die in einer hinreichend großen Umgebung von x_1 stetig ist.
Gesucht ist die Steigung der Tangente im Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$.

Weil P_1 auf der Kurve $y = f(x)$ liegt, ist $y_1 = f(x_1)$.
Also ist der gegebene Berührpunkt: $P_1(x_1 \mid f(x_1))$

Von x_1 geht man um eine Strecke $h \neq 0$ zur Seite und kommt zum „Nachbarpunkt" $Q(x_1 + h \mid f(x_1 + h))$

Dieser liegt um die Strecke h rechts von P_1, wenn $h > 0$ ist, um h links von P_1, wenn h negativ ist. Jedenfalls muss $h \neq 0$ sein, weil ja P_1 und Q sonst derselbe Punkt sind, und dann gibt es keine Sekante!

Berechnung der Sekantensteigung:

1. Schritt: $m_s(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ für $h \neq 0$.

2. Schritt: Umformen, so dass man h herauskürzen kann.

3. Schritt: Tangentensteigung = Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion für $h \to 0$:

$$\boxed{m_T = \lim_{h \to 0} m_s(h)}$$

Anmerkungen dazu:

(1) Die Sache mit dem Grenzwert ist eine schwierige Stelle und setzt Kenntnisse über stetige / unstetige Funktionen voraus. Man kann dies in der Datei 41011 „Stetige Funktionen 1" nachlesen. Kurz das Wichtigste:
Die Sekantensteigungsfunktion ist vor dem Kürzen bei h = 0 nicht stetig, denn für h = 0 wird der Nenner 0. Man kann jedoch den Faktor h herauskürzen, wodurch ein Funktionsterm entsteht, der zwar immer noch für h = 0 nicht zugelassen ist, für den man aber dennoch einen Wert für h = 0 berechnen kann. Wenn h gegen 0 geht, dann existiert wegen des Wegkürzens von h ein Grenzwert, den man durch Einsetzen berechnen darf.

(2) Dieses Entlanggleiten des Punktes Q auf der Kurve hin zu P_1 setzt ganz offenbar voraus, dass f in diesem Bereich stetig ist. Nun sind nicht alle Funktionen überall stetig. Aber wenn f an der Stelle x_1 stetig ist (das wollen wir wenigstens voraussetzen), dann gibt es zumindest eine (vielleicht nur sehr kleine) Umgebung von x_1, in der f stetig ist. Und h wählen wir einfach so groß bzw. klein, dass wir von $x_1 + h$ bis zu x_1 ein Intervall haben, in der f stetig ist, dann kann nichts passieren. Das müssen wir in der Rechnung gar nicht erwähnen oder beachten. Der Punkt Q darf ja ganz dicht bei P_1 liegen, das macht nichts aus und ergibt allemal eine Sekante.

Die Erzeugung der Ableitungsfunktion

USW: